B e t r a g t n i n g e r

over

Theorien af Bevaegelsen paa Hiul,

hvori fornemmelig vises

den Fordeel, höje Hiul have over de lave til at lette Bevægelsen.

Af

C. H ö y e r,

Capitain i Söe-Etaten.

Emnet, som jeg i det fölgende tager under Behandling, er vist nok, i sig selv betragtet, det Almindeliges Opmærksomhed værdig. Trangen til at flytte betydelige Vægter fra Sted til andet, er i det daglige Liv alt for stor og alt for jevnlig forekommende til at Maaden, det skeer paa, kunde være ligegyldig for noget Land. Men hvor Mangel af Floder og Kanaler nöder til at före de flyttende Byrder paa Axler, *der* maae det naturlig være fortrinlig vigtig at kiende med Klarhed, hvorpaa Letheden i denne Bevægelse Maade eegenligst beroer.

I de sædvanlige Theorier over Bevægelsen paa Hiul, synes mig man möder *deels* en Ufulstændighed, *deels* en Dunkelhed, der ikke kan paa nogen Maade befordre Fremskridt mod det bedre. For længst have disse Theorier viist, at det var saare nyttig til Axel Frictionens Hindring mod Bevægelsen, naar Hiulets Diameter blev i Forhold til Axlens Diameter saa stor muelig — videre at höje Hiul have over de lavere endnu den Fordeel, at de lettere rulle hen over enkelte Forhöyninger eller Fordybninger, der kunne möde paa enhver Vej. Dette har nu unegtelig sin Rigtighed, men det kan neppe undgaae Kyndiges Bemærkning, at der nödvendig maae være fleere og höjst rimelig end vigtigere Ting at betragte ved Sagen. Forestiller man sig meget betyngede Hiul at föres frem over en *Grund*, da er det af sig selv klart, at om Axlernes Friction i Hiulene antoges endog aldeeles Null, maatte der dog udfordres en vis fremtrækkende Kraft til at holde Bevægelsen vedlige. *Grunden* yttrer derfor nödvendig en Modstand, der er uafhængig af Axlernes Friction. "Virknings Maaden for denne "Modstand, samt hvorledes den, alt forresten lige, afhænger "af Hiulenes Diametrer eller Höyder, synes at være saavel den "förste og naturligste som og den vigtigste Gienstand for Be-"tragtningen." At Grundens Modstand i og for sig selv er större og vigtigere end den, som Hiulenes Friction mod Axlen i de sædvanligste Tilfælde afgiver, er ikke alleene en rimelig Formodning, men den maae blive indlysende for enhver, der sammenholder vore Lastvognes tunge Gang med hvad den Franske Coulombs videnskabelige Forsög i hans skiönne Priisskrivt over Frictionen ved de simple Maskiner har lært.

Hiint Formaal er det derfor, jeg i det fölgende har sögt at opnaae. *Grunden* ansees bestandig at være horizontal og homogoen.

Til dens nöyere mechaniske Bestemmelse har jeg antaget den Egenskab, som *deels* ved enkelte Forsög, *deels* ved Betragtninger à priori er forlængst befunden at passe nærmest med Sand-Grunde, og de övrige Jordarter i Almindelighed, jeg meener:

"At Modstanden, som Grunden yttrer mod enhver liden "Deel af Legemet, der trykkes imod samme, er ligefrem pro-"portioneret bemeldte Deels Dybde under Grundens Overflade."

Fig. 1.

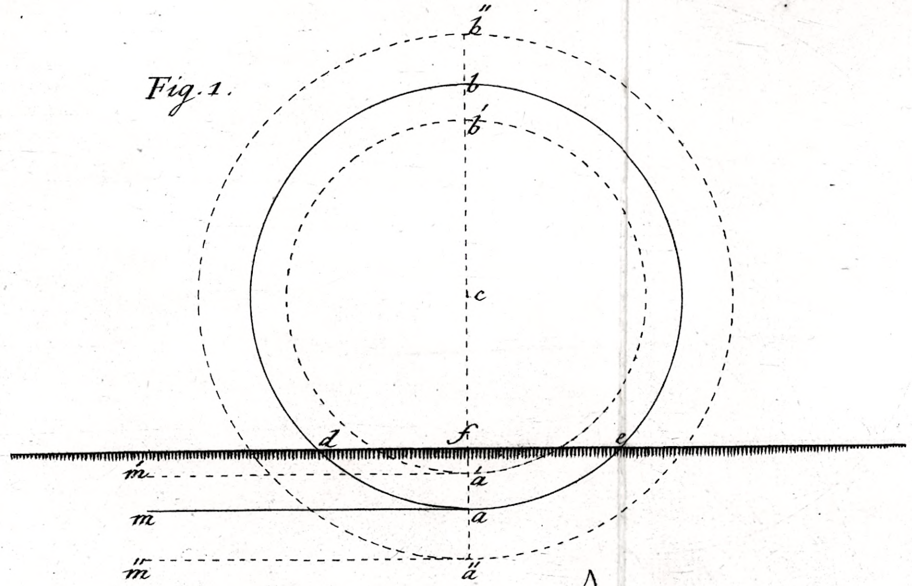


Fig. 2.

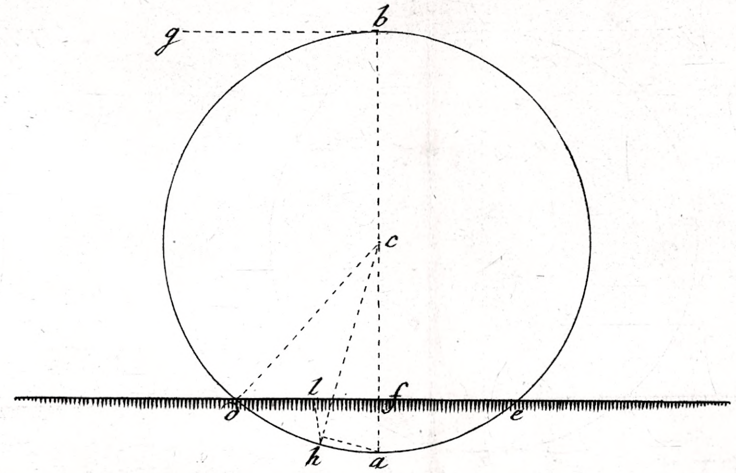


Fig. 3.

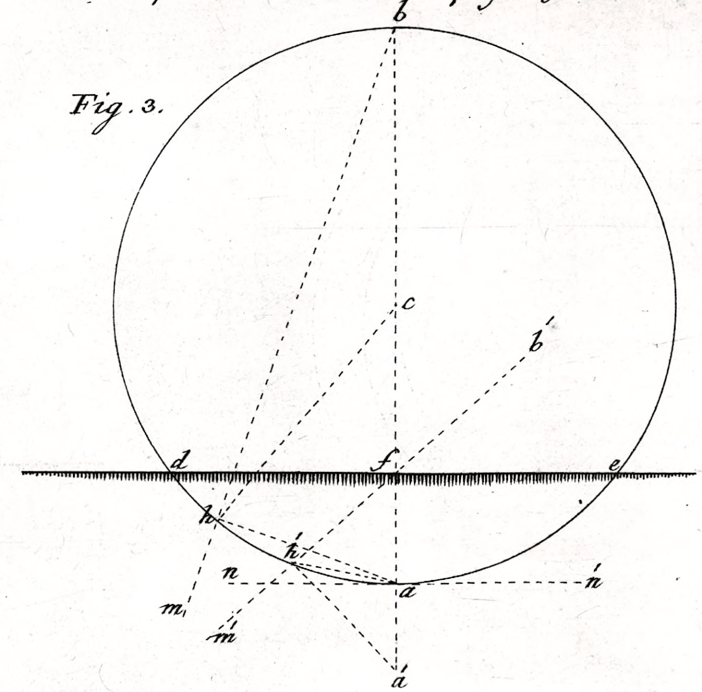


Fig. 4.

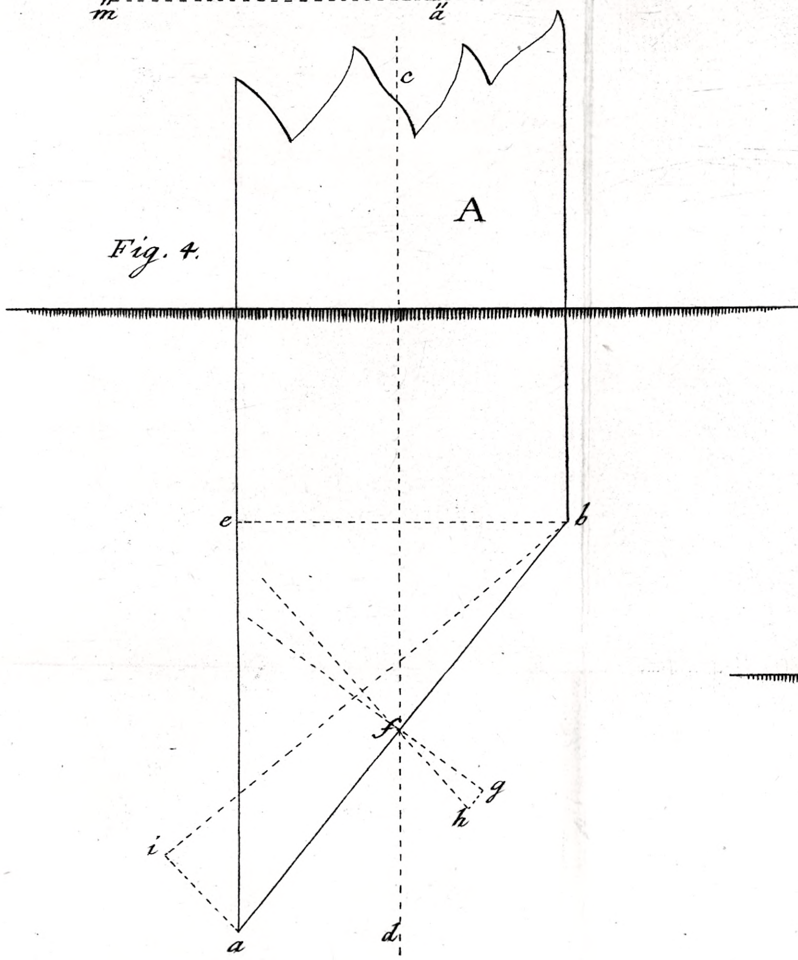


Fig. 5.

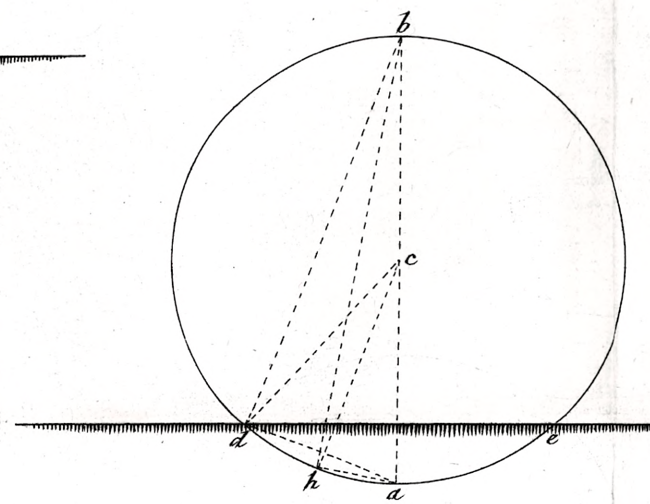
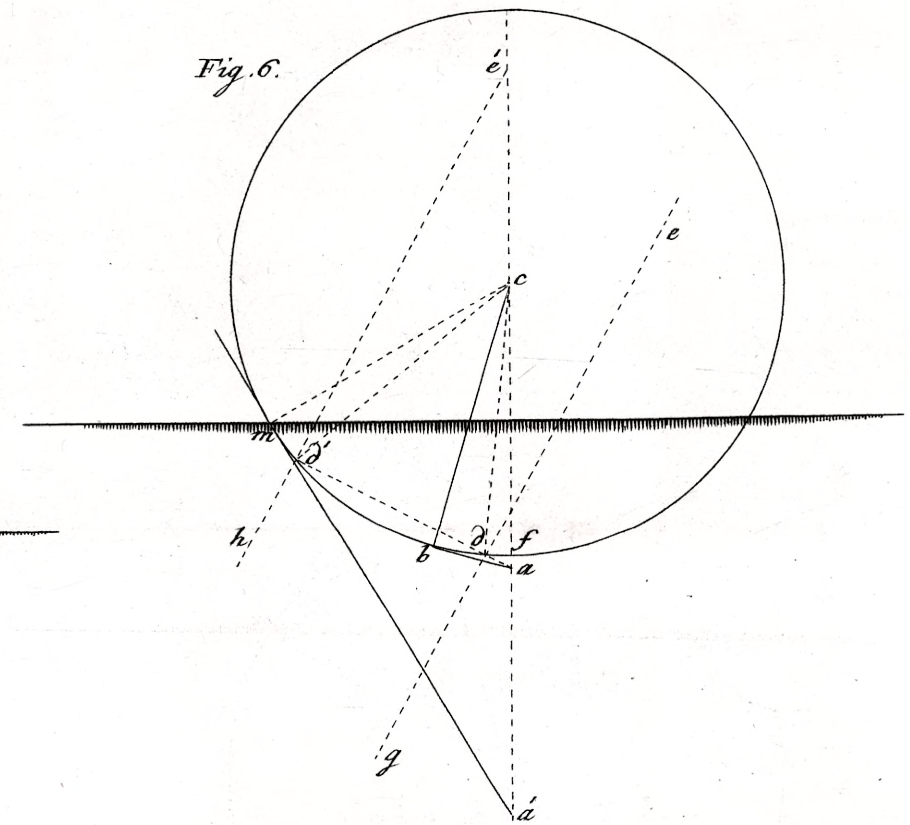


Fig. 6.



Stukket af Fridrich.

Man kan vist nok tænke sig Veje, hvor denne Lov *enten* aldeeles ikke, *eller* kuns med betydelige modifikationer har Sted, disse blive da Gienstand for nye Undersögelser, og kunne ikke hindre at ansee nærværende som en for sig bestaaende Deel af det heele.

Hiulet ansees indtil videre som en Solid betynget Cylinder, hvor Axel-Friktion naturlig ikke har Sted. Ved dens Bevægelser möde da fölgende forelöbige Betragtninger:

1. Naar et Hiul af givne Dimentioner og en given Vægt, skal föres frem med en given Hastighed efter een og samme Direction over den nys beskrevne *Grund*, da udfordres dertil en bestandig fremtrækkende Kraft, som i Storhed kan være betydelig forskiellig efter som Hiulets Bevægelse Maade er selv forskiellig, og dette endskiöndt de nylig benævnte Omstændigheder vedblive stedse de samme. Blandt de forskiellige Bevægelse-Maader ere 2de, der især udmærke sig tydeligen. *Den eene*, naar alle Hiulets Deele giennemgaaer parallelle Linier. Da er Bevægelsen slæbende, og den udforderlige Kraft til at bevare samme uniform er, som bekiendt, den störste af alle Tilfælde. *Den anden*, naar Hiulet ruller virkelig frem over Grunden. Hertil udfordres, at det dybeste Punct (Fig. 1.) *a* er i hvert Öieblik for sig i Hvile relativ til *Grunden*, hvorover Rullingen skeer, og at fölgelig det höieste Punct *b* har dobbelt saa stor Hastighed i Bevægelses-Directionen, som Centret *c* af Hiulet har. Denne Bevægelse-Maade fordrer, til at bevares uniform, en langt mindre Kraft end forrige. Men foruden disse 2de kunne endnu utallige andre have Sted.

2. I den omtalte rullende Bevægelse har hvert Punct af Hiulets Omtræk en ligesaa stor Rotations Hastighed omkring Centret, som Centrets egen fremgaaende Hastighed er. Nu

kan hvert Punct i Hiulets Omtræk *enten* have en större Rotations Hastighed end Centrets fremgaaende Hastighed er, da kan man sige det giör meere end at rulle over Grunden, og dette skeer, naar Hiulet f. Ex. bevæger sig efter den Lov, at Circlen $a'b'$ ruller virkelig frem over Linien $a'm'$, da er det dybeste Punct a' hvert Öieblik for sig i Hvile — *eller* ethvert Punct i Hiulets Omtræk kan have en mindre Rotations Hastighed end som Centrets fremgaaende Hastighed er, da kan man sige det giör mindre end at rulle over Grunden, og dette skeer, naar Hiulet f. Ex. bevæger sig saaledes, at Circlen $a''b''$ raller virkelig frem over $a''m''$, da er det dybeste Punct a'' hvert Öieblik for sig i Hvile.

3. Saa ofte et Legeme foreener Rotations-Bevægelse med en fremgaaende kan man, som bekiendt, altid ansee den heele samlede Bevægelse i hvert Öieblik for sig som Sving omkring et vist Center, der for bemeldte Öieblik er i Hvile. Dette Center er for de nylig omtalte Bevægelser Puncterne a, a' eller a''. Ruller Hiulet frem med m, kan man altsaa ansee Bevægelsen i hvert Öieblik for sig som et lidet Sving omkring a, a' eller a'' mod m, alt eftersom Rullingen skeer over am, $a'm'$ eller $a''m''$. Er nu Hiulet nedsynket i Grunden en Dybde af, saa er det indlysende, at Grunden maae yttre forskiellige Modstande mod Svingene omkring de bemeldte Centrer, og at den fremtrækkende Kraft maae ved Sving om a'' nödvendig være större end ved Svingene om a' eller a — i Almindelighed saa meget större, som a'' falder dybere under a til.

Ved de sædvanlige Hiuls Bevægelser, anvendes den fremtrækkende Kraft stedse giennem Hiulenes Center, det öieblik-lige Sving maae derfor ved dem immer skee omkring et Punct a'', der er længere fra Centret end Hiulets Radius er stor.

4. Disse Betragtninger leede nu til at oplyse *först.* Realiteten i *Grundens*, af Axel Frictionen uafhængige, Modstand imod Bevægelsen; thi da den heele Tyngde bliver under Bevægelsen baaret af Buen ad, saa maae Resultanten af Grundens Modstand, efter hvilke Love denne endog retter sig, nödvendig giöre en vis Vinkel med Verticalen, og derved afgive en horizonthal Modstand, som den bevægende Kraft bestandigen har at overvinde. For at ommeldte Vinkel ikke fik Sted, maatte Impressionen saavel i *Grunden* som i Hiulets Omtræk være aldeeles Null, hvilket naturlig ingen Tid bliver Tilfældet under virkelige Bevægelser.

Andet. Hvorledes den gradeviise Overgang fra en slæbende til den muligst lette rullende Bevægelse faaer Sted. At den bevægende Kraft maae ved de sædvanlige Hiul stedse anvendes giennem Centret, medförer, som ovenmeldt, at Hiulene ikke kunne have en eegentlig rullende Bevægelse, end ikke i det Tilfælde Axel Frictionen er null, men det öjeblikkelige Sving maae skee omkring et Punct a'', hvis Dybde under Hiulet afhænger af Grundens og Hiulets Beskaffenheder. Kommer nu Axel-Frictionen til, maae ommeldte Punct a'' rykke dybere ned, og dette saa meget meere, som Axel-Frictionen er större til. Virkningen heraf maae viise sig ei alleene ved at Bevægelsen bliver sværere, men ogsaa ved at Rotations-Hastigheden bliver imod Centrets fremgaaende Hastighed mindre. Dette afgiver naturlig et Middel til at bestemme Beliggenheden af a'' ved Erfaringen selv; thi lad $ca'' = R$ Hjul-Centrets giennemgangne Vei $= L$ og Antallet af Hiulets Revolutioner ved denne Veis Giennemgang $= N$, saa er $N = \frac{L}{2\pi . R}$ (2π Omtrækket af Circlen, hvis Radius 1) altsaa haves $R = \frac{L}{2\pi . N}$, og kan saaledes immer ansees givet, da L og N kunne uden stor Vanskelighed observéeres. Nytten af slige Observationer i *Grunde* af forskiellige Arter, saavel for selve Theorien af Hiulenes Bevægelser som for en tydeligere Kundskab om *Grundenes* Modstands Maader imod denne Bevægelse, er *deels* af sig selv indlysende, *deels* vil den ved det efterfölgende blive klarere.

Endelig antyde de foregaaende Betragtninger, hvorledes en almindelig Theorie over Hiulenes Bevægelser kunde anstilles, dersom *Grundenes* Modstands Maader vare dertil nöie nok bekiendte. Men da dette ingenlunde er Tilfældet, fordrer Klarhed og Læselighed i Resultater, at Betragtningen giöres meere Speciell, og det aldeeles hypothetiske og uvisse saavidt muelig afsondres fra det mindre uvisse.

5. Hvorledes Grunden endog yttrer sin Modstand over Buen *ad*, naar Hiulet forestilles at giöre et lidet Sving omkring et Punct a'', bliver det immer vist, at Modstanden over enhver liden Deel af Buen *a d* maae kunde reduceres til, eller forestilles ved, 2de Kræfter, en normal og en Tangential Kraft. Der abstrahiéres i det fölgende stedse fra elastiske Kræfter, og Cohæsions Kræfter (med Hiulets Rand) i *Grunden*, da disse kuns vilde fordunkle Betragtningen. Tangential Kræfterne blive af lige Natur med de saa kaldte Frictions Kræfter, de maae nemlig i deres Intensitet afhænge saavel af Pressionen som af Beskaffenheden af Hiulets Rand og af *Grunden* selv. Disse sidste kunne altsaa forestilles saaledes, at ingen eller kuns en aldeeles ubetydelig Friction kan faae Sted, i dette Tilfælde

bleve da de normale Kræfter aleene tilbage. Vi kunne altsaa beqvemmelig afsondre de 2de Hoved-Tilfælde:

A. Naar de normale Kræfter alleene have Sted, og *Grunden* ingen Tangential Kræfter kan yttre.

B. Naar Grunden yttrer begge Slags.

A.

6. Naar *Grunden* modstaaer alleene i Directionen af Normalerne, det er efter Radierne giennem Centret c, saa gaaer Resultanten af Grundens Modstand naturlig giennem samme Center, og naar den *der* forestilles deelt i en horizonthal og vertical Kraft, maae *denne* være lig Hiulets heele Vægt, og *hiin* lig den fremtrækkende Kraft. Axel-Friction kan under denne Forestilling ikke have Sted, og da de Centrale Kræfter ikke kunne have nogen Virkning paa Hiulets Rotation, saa bliver denne i sig selv vilkaarlig, kuns for at nærme Forestillingen til de siden efter betragtende virkelige Tilfælde, antages Svinget i hvert Öieblik for sig at skee enten omkring a eller et Punct neden for. — Lad nu:

Hiulets Radius - - - r
dens Rands Breede eller Tykkelse # Axlen - b
dens heele Vægt - - - Q ℔
$\angle acd$ - - - - α
en variabel Deel deraf, eller $\angle ach$ - - - - ϕ
Modstanden, som Grunden yttrer i Punct a, er saaledes, at naar den virkede med samme Intensitet over □ Eenheden, vilde dette være lig en Vægt - - - - q ℔
Sum af de verticale Modstande over ah - - - S
Sum af de horizontale - - - - - - - - f

I Fölge den antagne mechaniske Lov for *Grunden* bliver da dens Modstand ved Punct $h = \frac{hl}{af} \cdot b\,r\,q\,d\,.\,\phi =$
$= \frac{r\,q\,b}{1 - \cos\alpha}\,(\cos\phi - \cos\alpha)\; d\,.\,\phi$ altsaa

$$d.\,S = \frac{r\,q\,b}{1 - \cos\alpha}\,(\cos\phi^2 - \cos\alpha\,\cos\phi)\; d\,.\,\phi$$

naar denne integreres og ϕ settes $= \alpha$ faaes

$$S = \frac{r\,q\,b}{2}\left[\frac{\alpha - \sin\alpha\,\cos\alpha}{1 - \cos\alpha}\right]$$

videre er $d.f = \frac{r\,q\,b}{1 - \cos\alpha}\left[(\cos\phi\,\sin\phi - \cos\alpha\,\sin\phi)\; d\,.\,\phi\right]$
naar ϕ efter Integreringen settes $= \alpha$, gier denne

$$f = \frac{r\,q\,b}{2}\,(1 - \cos\alpha)$$

da nu $S = Q$, saa bestemmes derved q at være
$= \frac{2\,Q\,(1 - \cos\alpha)}{r\,b\,(\alpha - \cos\alpha\,\sin\alpha)}$, og denne indsat i f giver endelig

$$f = Q \times \frac{(1 - \cos\alpha)^2}{(\alpha - \cos\alpha\,\sin\alpha)}$$

7. Fra denne Værdie for f erholdes fölgende:

antagne Verdie af α	den udforderlige fremtrækkende Kraft, eller f	störste Dybde af Nedsynkningen, eller af, naar Hiulets Höjde er 4 Fod.
5° - - - - -	0,033 Q - - - - -	0,09 to
10° - - - - -	0,066 — - - - - -	0,36 —
15° - - - - -	0,098 — - - - - -	0,72 —
20° - - - - -	0,131 — - - - - -	1,45 —
25° - - - - -	0,165 — - - - - -	2,25 —
30° - - - - -	0,198 — - - - - -	3,22 —
35° - - - - -	0,232 — - - - - -	4,34 —

40°	0,266	5,62
45°	0,301	6,83
50°	0,336	8,57
55°	0,371	10,22
60°	0,407	12,00

Fra denne Tavle fölger:

a) De fremtrækkende Kræfter kunne ansees at være ligefrem som fordybnings-Buerne og dette nærlig for alle virkelig mödende Fordybninger.

b) Den udforderlige fremtrækkende Kraft, er betydelig stor, endog for maadelige Nedsynkninger, saaledes findes den

Ved Hiul af 4 Fod Höide.	for $\frac{3}{4}$ to störste Fordybning	$=$	$\frac{1}{10}$ af Q
	— $3\frac{1}{4}$ - - -		$\frac{1}{5}$ - -
	— $4\frac{1}{2}$ - - -		$\frac{1}{4}$ - -
	— $8\frac{1}{2}$ - - -		$\frac{1}{3}$ - -

Dette förer naturlig til at betragte, hvorledes f vil under samme Q afhænge af Hiulets Höide eller Diameter.

8. Da Q eller S antages at blive uforandret, saa haves almindelig

$$\frac{r\,q\,b}{2}\left(\frac{\alpha - \cos\alpha\sin\alpha}{1 - \cos\alpha}\right) = \frac{r'\,q'\,b'}{2}\left(\frac{\alpha' - \cos\alpha'\sin\alpha'}{1 - \cos\alpha'}\right)$$

men $q : q' = r\,(1 - \cos\alpha) : r'\,(1 - \cos\alpha')$

altsaa $\frac{q}{1 - \cos\alpha} : \frac{q'}{1 - \cos\alpha'} = r : r'$ derfor

$$r^2 b\,(\alpha - \cos\alpha\sin\alpha) = r'^2 b'\,(\alpha' - \cos\alpha'\sin\alpha')$$

$$\frac{r^2 b}{r'^2 b'} = \frac{2\alpha' - \sin 2\alpha'}{2\alpha - \sin 2\alpha}$$

Ved at udtrykke Sinuserne i Buer findes derfra

$$\frac{\acute{\alpha}}{\alpha} = \left(\frac{r^2 \,.\, b}{r'^2 \,.\, b'}\right)^{\frac{1}{3}} \times \left\{ \frac{1 - \frac{(2\,\alpha)^2}{4\,.\,5} + \frac{(2\,\alpha)^4}{4\,.\,5\,.\,6\,.\,7} - \text{etc.}}{1 - \frac{(2\,\grave{\alpha})^2}{4\,.\,5} + \frac{(2\,\grave{\alpha})^4}{4\,.\,5\,.\,6\,.\,7} - \text{etc.}} \right\}^{\frac{1}{3}}$$

Lad r' antages at være den störste Radius, saa er $\acute{\alpha}$ naturlig den mindste Bue, og denne supponeres her at blive sögt. Da nu ingen af Buerne ere meget store, saa er det klart Bröken

$$\left\{ \frac{1 - \frac{(2\,\alpha)^2}{4\,.\,5} + \text{etc.}}{1 - \frac{(2\,\grave{\alpha})^2}{4\,.\,5} + \text{etc.}} \right\}$$ maae være mindre end 1. fordi

$(2\,\acute{\alpha})$ er mindre end $(2\,\alpha)$, altsaa maae ogsaa

$\frac{\acute{\alpha}}{\alpha}$ være mindre end $\left(\frac{r^2\, b}{r'^2\, b'}\right)^{\frac{1}{3}}$ fölgelig naar $b : b' =$

$= r : r'$ bliver $\acute{\alpha}$ mindre end $\frac{r}{r'} \,.\, \alpha$ det er:

"Naar Hiulenes Breeder antages at være mod hinanden "ligesom deres Höider, da aftager Fordybnings-Buernes Grade "Antal i et större Forhold end Hiulenes Höider voxe, naar "begge Hiulene antages lige meget betyngede."

Men det fandtes (§ 7.), at de fremtrækkende Kræfter vare mod hinanden ligefrem som Fordybningernes Grade Antal, det fölger altsaa:

"Naar den förende Last er i begge Tilfælde den samme, "da aftage de fremtrækkende Kræfter, som udfordres til at "holde Bevægelsen vedlige, i et endnu större Forhold, end som "Hiulenes Höider og Breeder voxe."

9. At Tangential-Kræfterne, som vi i foregaaende have sat ud af Betragtning, ikke kunne formindske *Grundens* Mod-

stand imod Bevægelsen, er af sig selv temmelig klart, og at Axel-Frictionen ikke kan forhöie Grundens Modstand noget mærkelig over det Axel-Frictionen selv, reducéret til Hiulets Rand, belöber sig til, vil ogsaa kunde antages som höist rimelig. For altsaa at kunde anstille en Slags Sammenligning mellem *Grundens* og Axel-Frictionens Modstand imod Hiulenes Bevægelser, behöve vi kuns at angive et Maal fos sidstmeldte.

Lad Middel Radius af Axlen i Hiulet - r'

$\frac{\text{Pressio}}{\text{Frictio}}$ for Axlen i dens Huus - - n

saa er Frictions-momentet om Axlens Middel-Linie $r' \times \frac{Q}{n}$

og for at denne overvindes ved Grundens Tangential Modstand imod Hiulets Rand med Armen r, maae den Tangentiale Modstand blive - - - $= \frac{r'}{r} \times \frac{Q}{n}$

Ved Q forstaaes, ligesom forhen, den heele mod *Grunden* trykkende Last, i Steden for det burde eegentlig *her* være bemældte Last mindre end Hiulenes eegen Vægt. Men da Hiulenes Vægt kan mod et svært Læs ansees ringe, og Slutningerne i den intenderede Sammenligning blive paa denne Maade sikkrere og meere simpel, saa kan Q gielde for begge.

$\frac{r'}{r}$ er ved Arbeyds-Vogne med 4 Fod höye Hiul neppe större end $\frac{1}{6}$, og n kan ikke sættes mindre end 7 à 8, naar Omsorg og Smörelse ikke paa uvedbörlig Maade forsömmes. n taget $= 7\frac{1}{2}$ giver Axel-Frictionens Modstand $= \frac{Q}{45} = 0{,}022\ Q$. For at *Grundens* eegen Modstand, fra de normale Kræfter alleene, ikke oversteeg denne Störrelse, maatte den störste Dybde af Nedsynkningen være mindre end en halv Liine (Tavlen § 7). En saa liden Fordybning under en svær Last kan man uden

Tvivl sikkert antage, at end ikke de beste Lande-Veje nogen Tid tillade. Axel-Frictionen er med 4 Fod höye Hiul rimelig endnu mindre i de sædvanligste Tilfælde, end vi her have anslaget den for, men om dette endog ikke var, maae dog *Grundens* Modstand, selv paa gode Veye, ansees nogle Gange större end Axel-Frictionens, for at Lastvognenes tunge Gang bliver forklarlig. De umiddelbare Fölger heraf ere:

a) Jevne og haarde Veye afgive det kraftigste og visseste Middel til at lette Vognenes Bevægelser. Men da Localet ofte sætter Grændser for Graden, hvortil dette kan opnaaes, saa

b) blive höye og i Forhold brede Hiul *dernæst* det meest tilforladelige og almeennyttige Middel. Ej alleene nedsætte de höye Hiul Axel-Frictionen, alt forresten lige, i samme Forhold som de ere höye til, men de nedsætte ligeledes den vigtigere normale Modstand fra *Grunden* i samme Forhold, som de ere höyere til. Dette sidste kunne de andre Midler, der alleene gaae ud paa Axel-Frictionens Formindskelse, naturlig ikke bevirke.

Disse Slutningers Rigtighed kan man ansee bekræftet ved den daglige Erfaring i de Lande, hvor en livelig indenrigs Handel har nödt til at söge Lettelse i Bevægelse paa Axler. Ved Jernværker og Kulmiiner finder man, saavel i Frankerige som fornemmelig i Engeland, Vey-Spoer anlagte, for betydelige Strækninger, af stöbt Jern, over hvilke Lastvognene ruller med 4 Hiul ligeleedes af stöbt Jern. Ved denne Indretning kan Impressionen vist nok ansees bragt til sit Minimum, og da Hiulenes Höider ere kuns 3 à 4 Fod, kan Bevægelsens Lethed blot for den ringere Deel være grundet i Axel-Frictionens Formindskning. Naar nu een Hest formaaer at fremdrage paa saadanne Veye indtil 4 à 5000 Pd., saa viiser dette tydelig, at *Grun-*

dens Modstand maae paa de almindelige Lande-Veye meget overgaae Axel-Frictionens. Men det ommældte Middel til Bevægelsens Lettelse maae stedse blive local eller af liden Udstrækning imod det Heele. Hvor klart end saadanne Tilfælde viise Vigtigheden af gode Lande-Veye, saa ville disse dog immer beholde en Modstand tilbage, der giör et andet Lettelse-Middel önskelig. Dette finder man i ommældte Lande fornemmeligst sögt og opnaaet ved höye og breede Hiul. Karrer eller 2 hiulede Vogne med 6 à 7 Fod höye Hiul ere derfor i samme Lande sædvanlige.

Kunde det nu i Betragtning heraf antages som rigtigt, at *Grundens* Modstand mod Hiulenes Bevægelse er i de sædvanligste Tilfælde nogle Gange större end Axel-Frictionens, saa vilde det end videre fölge:

c) For at giöre Gavnligheden af en Forandring, der alleene sigter til at formindske Axel-Frictionen enten i dens Moment eller i dens Intensitet, f. Ex. Jern-Axler — en anden Beklædning i Axel-Huuset — en anden Slags Smörrelse, kan neppe gives et misligere Middel, end at lade Vogne med og uden disse Forandringer trække af Dyr. Jo mindre Axel-Frictionen er imod den heele Modstand, jo nödvendigere er det ved saadanne Pröver, at alle övrige Omstændigheder ere fuldkommen lige, men dette er vist nok yderst vanskeligt om ey umueligt at erholde — Til at undersöge Frictionen mellem haarde Materialier, har man desuden meget simplere — nöyagtigere og tilforladeligere Midler.

d) Ved Spörgsmaalet: om 2 eller 4 hiulede Vogne ere de fordeelagtigste? bliver det vist nok en meget nödvendig, skiönt ikke den eeneste fornödne, Undersögelse, hvilken af disse 2de tillader de höyeste Hiul? I Sammenligning med Vogne paa 4 Hiul kunne Karrer synes at have meget imod sig i Hensigt til Beqvemheden i Brugen, men at dette fornemmelig grundes i Mangel af Bevanthed med samme, kunde man formoede ved at see, med hvor liden Vanskelighed svært belæssede Karrer föres paa andre Stæder giennem Byernes Gader — over Broer og alle Slags Lande-Veye. Naar f. Ex. Fragt-Karrer föres fra Paris til Marseille og tilbage igien med de selv samme Heste, saa vidner dette unægtelig om, at end ikke Brancard Hesten lider noget betydeligt, og at de mödende Ulemper ved at före Karrer maae ikke indtræffe mærkelig oftere end det skeer ved andre Vogne, naar man först er blevet bekiendt med deres Behandling.

10. Fordeelen, som Karrerne maatte i Fölge foregaaende Sammenligning gives over de eegentlige Vogne formedelst deres höyere Hiul, kunde synes tvivlsomt ved fölgende Bemærkning: Naar en given Last skal föres frem, ville rigtig nok höye Hiul have Fordeel over de lavere, men det fölger ikke ligefrem deraf, at en Karre vilde være fordeelagtigere end Vognen med 4 Hiul, fordi naar den heele Last bæres paa de 2de Hiul, bliver Nedsynkningen i *Grunden* större, fölgelig ogsaa Modstanden större, og muelig i större Forhold, end om Lasten var fordeelt paa de 4re Hiul. Denne Tvivl hæves ved fölgende:

Lad den heele Last saavelsom Hiulenes Höyde og Breede eller Tykkelse være eens for begge, saa bliver (efter §. 6.)

$$\text{for Karren } S = \frac{rqb}{2}\left(\frac{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}{1 - \cos\alpha}\right)$$

$$\text{for Vognen } S' = \frac{rq'b}{2}\left(\frac{\alpha' - \sin\alpha'\cos\alpha'}{1 - \cos\alpha'}\right) \times 2$$

fölgelig da $S = S'$ og $q : q' = (1 - \cos\alpha) : 1 - \cos\alpha'$, saa haves

$$\alpha - \sin\alpha\cos\alpha = 2\,(\acute{\alpha} - \sin\acute{\alpha}\cos\acute{\alpha}$$

$$\alpha = 2\,\acute{\alpha} - \left(\frac{2\sin 2\acute{\alpha} - \sin 2\alpha}{2}\right)$$

Fra denne Verdie fölger, at α er stedse mindre end $2\,\acute{\alpha}$, og at Forskiellen voxer med $\acute{\alpha}$ selv, i det mindste for de maadelige Störrelser af α og $\acute{\alpha}$, som her handles om.

Men naar den heele Last settes som forhen $= Q$, da

er for Karren $f = Q \cdot \frac{(1 - \cos\alpha)^2}{(\alpha - \cos\alpha\sin\alpha)}$

og for Vognen $f = Q \cdot \frac{2\,(1 - \cos\acute{\alpha})^2}{(\acute{\alpha} - \cos\acute{\alpha}\sin\acute{\alpha})}$

det er efter foregaaende (§ 7.): imod hinanden ligesom $\alpha : 2\,\acute{\alpha}$, da nu α er mindre end $2\,\acute{\alpha}$, saa har Karren, endog under de lige Höider og Breeder, nogen Fordeel, naar Tanken bindes alleene til *Grundens* normale Modstand.

B.

11. At Tangential Kræfter have Sted ved Hiulenes Bevægelser, derom vidner den daglige Erfaring ved at Axel-Frictionen overvindes. Men fra det at disse Kræfter ere til, fölger ikke ligefrem, *hvorleedes* de eegentlig virke, og uden en enten rigtig eller urigtig Forestilling *derom*, kan ikke nogen Theorie fremkomme. Da de fölgende Undersögelser maae tilstaaes at være endnu meere end foregaaende under det Tilfælde, at Forestillingen, hvorpaa de bygges, kan være meer eller mindre rigtig, og det kunde meenes, at Theorie eller abstracte Betragtninger ere i saadanne Tilfælde aldeeles overflödige eller unyttige, saa maatte det undskyldes, at jeg til Forsvar derimod anförer nogle faa Bemærkninger. For Michaniquen, som nyttende Videnskab betragtet, er det stedse vigtigt,

at Naturen og Virknings-Maaden af de materielle Tings, saavel drivende som modstaaende, Kræfter kiendes. For endnu ukiendte Kræfter er vist nok intet andet Middel, end at Naturen selv adspörges ved Observation og Forsög. Men Maaderne kunne være forskiellige. Ere Kræfterne saavidt kiendte, at man om deres Virknings-Maade kan danne sig en rimelig Forestilling, da opnaaes Maalet uden Tvivl stedse paa den simpleste og og directeste Maade, naar Theorie gaaer forud for Forsög. Den forelöbige Theorie nedbringer Forsöget til en blot Sammenligning, hvorved den beste Fremgangs-Maade viiser sig meere bestemt og indlysende, end den uden Theorie kunde. Ved Theorien fæstes Agtsomheden usammenlignelig bedre, end det uden Theorien var mueligt, til de enkelte Ting, som man eegentlig har at spörge om, og som man ved Forsöget *kan* faae Svar paa. Endelig angiver Theorien ikke siælden, at visse Data ere fornödne, hvilke man uden den forelöbige Theorie muelig ikke var faldet paa at giöre sig bekiendte. Det var saaledes först efter at Galilæus havde giort sig Begrebet om en constant accelererende Kraft tydelig, og ved abstracte Betragtninger fundet, hvorledes den maatte viise sig i sine endelige Virkninger i Hensigt til Tid og Rum, at han ved Forsög befandt Tyngden ved Jordens Overflade at være en saadan Kraft, fordi den virkede efter de samme Love. Jeg haaber saaledes at möde Undskyldning endog i det Tilfælde, at den i det fölgende valgte Forestillings-Maade skulde befindes urigtig.

12. Mellem Hiulenes Bevægelser er den virkelig rullende meest simpel. Forestiller man sig at det öybliklige Sving skeer omkring *a* (Fig. 3.), da synes intet naturligere, "end at *Grun*-"*den* maae imodstaae i de modsatte Directioner, i hvilke den

"instigeres til at vige." — Altsaa ved h' maae Grunden modstaae i Directionen $h'b$, og ved h i Directionen hb. Men jo mindre Vinkel denne Direction giör med Hiulets Rand, jo meere indsees Nödvendigheden af en Grændse for denne Forestillings-Maade, da Fladerne ikke muelig *kunne* trykke under alle Vinkler med deres eeget Plan. Det samme sees end tydeligere, dersom Svinget forestilles at skee omkring et Punct a'. Lad derfor et Legeme A. (Fig. 4) nedtrykkes i *Grunden* efter cd, saa er det naturligt mod ab at Modstanden yttres. Antages Grunden at modstaae med lige Intensitét i enhver Direction, da er det klart, dersom den kan ansees at vige i Direction af Bevægelsen, maatte den totale Modstand være som eb, viger den derimod efter Perpendiculairen paa ab, da bliver Modstanden som ab. Om det nu skal være den eene eller den anden af disse Deele, eller og noget derimellem, beroer paa Beskaffenheden saavel af Grunden som af Fladen ab. Kraften, som en Flade muelig kan meddeele, er enten $\perp$ paa eller $\#$ med den selv, dette sidste skeer blot ved dens Ujevnhed, eller i Almindelighed ved Frictionen. Dersom nu Frictionen kunde have hvad Forhold man vilde til Pressionen, saa vilde det unegtelig kunde antages, at Grunden maatte i nærværende Tilfælde immer vige efter Directionen cd. Men er derimod Frictionen $= hg$ for en Pression fg, da vil ab ikke kunde meddeele Kraft i anden Direction end fh, i denne Direction maatte derfor Grunden ansees at vige, og dens Modstand blev da som bi, paa hvilken hf er perpendiculair. Sættes $\angle hfg = \beta$, saa at $\frac{\text{Frictio}}{\text{Pressio}}$ for den givne Overflade og *Grund* er $=$ Tang. β, saa fölger, at hvad Vinkel ab endog giör med Directionen, hvori den skal bevæges, saa maae stedse, saa længe den er mindre end ($90^{\circ}_{-} - \beta$), Grundens Modstand vurderes efter $ab \times \cos\beta$, er den lig eller större end ($90^{\circ}_{-} - \beta$), bliver $ab \times \cos\beta = eb$, det er lig Fladens Projection paa et Plau $\perp$ paa Bevægelses-Directionen. — Herefter angives nu Grundens Modstand i det fölgende: Man kan neppe tvivle om, at jo de fleeste Slags Veye give β en temmelig höy Værdie; thi at endog flydende Legemer tillade den en mærkelig Störrelse, derpaa haves et tydeligt Beviis fra den kiendelige Eorskiel mellem de samme Skibes Seylen naar de ere reene og ureene — naar de ere forhudede med Kaaber eller ey. — At Hiule-Omtrækkenes mindre eller större Glathed maae biedrage til at forandre β er af sig selv klart.

13. Et virkelig rullende Hiuls Bevægelse bestemmes nu lettelig, naar man antager, at $\frac{1}{2}\alpha$ (Fig. 5.) er lig eller mindre end β; thi i saa Tilfælde kan man ansee *Grunden* over heele Buen ad at vige eller yttre sin Modstand i de samme Directioner, som den instigéres ved de öyebliklige Sving til at vige i. For ethvert Punct h yttrer Grunden altsaa sin Modstand i Directionen hb, hvoraf fölger ligefrem, at Resultanten gaaer giennem Punct b, og at fölgelig den fremtrækkende Kraft maae anvendes giennem samme Punct, og ikke giennem Centret, for at Hiulet virkelig ruller. Benævningerne (§. 6.) biebeholdte, bliver Grundens Modstand efter

$$h\,b = \frac{b\,r\,q}{1 - \cos\alpha}\,[\cos\phi - \cos\alpha]\,\cos\tfrac{1}{2}\phi\,d\,.\,\phi$$

Denne giver $d\,.\,S = \frac{b\,r\,q}{1 - \cos\alpha}\left((\cos\phi - \cos\alpha)\,\cos\tfrac{1}{2}\phi^2\,d.\phi\right) = \frac{b\,r\,q}{1 - \cos\alpha}\left(\frac{1 + \cos\phi}{2} \times (\cos\phi - \cos\alpha)\,d.\phi\right)$, denne integreret og ϕ sat $= \alpha$, giver $S = \frac{r\,q\,b}{4}\left(\frac{(\alpha - \cos\alpha \sin\alpha) + 2\,(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)}{1 - \cos\alpha}\right)$

videre haver $d.\int = \frac{b\,r\,q}{1 - \cos\alpha}(\cos\phi - \cos\alpha)\cos\tfrac{1}{2}\phi \sin\tfrac{1}{2}\phi\ d.\,\phi =$

$$= \frac{b\,r\,q}{1 - \cos\alpha}(\cos\phi - \cos\alpha)\frac{\sin\phi}{2}\,d\,.\,\phi$$

naar ϕ efter integreringen settes $= \alpha$ bekommes

$$\int = \frac{r\,q\,b}{4}(1 - \cos\alpha)$$

$Q = S$ giver q. der indsat i $\int$ giver:

$$\int = Q \times \frac{(1 - \cos\alpha)^2}{(\alpha - \cos\alpha\sin\alpha) + 2\ (\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}$$

Vilde man sammenligne $\int$ her med $\int$ i (§. 6.), da maatte först fra Æqvationen $S = S$ bestemmes hvorledes Buerne α forholde sig i de 2de Fald, da den her maae være noget mindre end hist. For end videre Lettelse i Sammenligningen bemærkes, at Störrelsen 2 (sin α — α cos α) er i Almindelighed noget större end (α — cos α sin α), men for maadelig smaae Verdier af α kuns lidet, saa de kunde i disse Tilfælde ansees lige. Fra $\alpha = 0$ til $\alpha = 25^{\circ}$ er det kuns höiest $\frac{1}{1000}$, for $\alpha = 40^{\circ}$ er det $\frac{8}{1000}$ og for $\alpha = 60^{\circ}$ - - - - $\frac{70}{1000}$, som den förste af bemeldte Störrelser overgaaer den sidste.

14. Lad det nu gives, at den fremtrækkende Kraft anvendes giennem Hiulets Center, saa maae Svinget i hvert Öyeblik for sig skee omkring et vist Punct a (Fig. 6.) uden for Hiulets Rand. Lad fra a drages Tangenten ab, og et Punct, taget paa hver Side af Berörings-Punctet b, være d og d'. Som nu disse skulle, i Svinget omkring a, beskrive smaae Buer $\perp^{re}$ paa ad og ad' det er: i Directionen af dg og $d'h$, saa maae Grundens Modstand yttre sig i Directionerne de og $d'e'$, saa længe

Vinklerne cde og $cd'e'$ ey overstige β, naar dette derimod bliver Tilfældet, da yttrer Modstanden sig vel endnu til samme Side af Normalen, som de bemældte Linier angive, men dens Directions Vinkel med Normalen forbliver β, hvor meget endog hine Liniers Vinkler med Normalen maatte overstige β. Lad nu, dette forudsat, Grundens Modstand deeles i normale og tangentiale Kræfter, saa er det klart, at for alle Puncter mellem b og f ville Tangential-Kræfterne söge at foröge Rotationen omkring Centret c, de ville derimod for alle Puncterne mellem b og m söge at formindske samme. Da nu Normal-Kræfterne ikke kunne have nogen Virkning paa Rotationen omkring Centret, saa fölger at:

"Naar Axlen har ingen Friction i Hiulet, da maae Sum af "Tangential-Kræfterne over bm være lig Sum af samme Kræf-"ter over Buen bf. Har derimod bemældte Friction Stæd, "da bör Sum af Tangential-Kræfternes Momenter for Buen "bf overgaae Sum af samme Kræfters Momenter for Buen "bm saa meget, som Axel-Frictionens Moment omkring Cen-"tret c er stor."

Da Punct a eller Buen fb maae efter (4^{de}) ansees givet eller bekiendt, saa forskaffer denne Betingelse ligefrem en Bestemmelse for β, naar Axel-Frictionen antages, som naturlig, at være bekiendt.

fb og β saaledes fundne, bestemmes lettelig S og f, og faaer man da, efter forhen brugte Fremgangs-Maade, de endelige Værdier for q og f, hvorved alt det forlangte haves.

I Almindelighed betragtet medförer Sagen ingen Vanskelighed, da alle mödende Integraler kunne skee ved Buer — deres trigonometriske Fonctioner, og de hyperboliske Logarithmer af samme, og skulle derfore ogsaa de omtalte Æqvationer til Slutning anföres. — Men deres större Vidtlöftighed giör en mindre direct Methode saa meget meere önskelig, som man paa den eene Side ingen Observationer endnu haver over Störrelsen af Buen fb, og der paa den anden Side kan være Tvivl, om β er virkelig constant over heele Nedsynknings-Buen, da Antagelsen (i 12): "at *Grunden* modstaaer med lige Intensitét i enhver Direction" maae ansees at være langt fra fuldkommen Sikkerhed.

Vinkelen, som Modstands-Directionen giör med Normalen, er ved b Null, og gaaer derfra voxende frem, saavel mod f som mod m, indtil den bliver lig β, som den ikke overstiger. Lad antages, at bemældte Vinkel er over bf constant og $= \beta'$, over Buen bm ligeledes constant men $= \beta''$. saa ere β' og β'' hver for sig nödvendig mindre end β.

15. Lad $\angle fcb = \acute{\alpha}$, og alle forhen antagne Benævninger biebeholdes, da bliver:

$$d.(\text{Tang. Kraft}) = \frac{bqr \sin 2\beta'}{2(1 - \cos\alpha)} (\cos\phi - \cos\alpha)\, d.\phi \text{ for Buen } bf$$

$$\text{Sum af Tang. Kræfter over } bf = \frac{bqr \sin 2\beta'}{2(1 - \cos\alpha)} \left(\sin\acute{\alpha} - \acute{\alpha}\cos\alpha\right)$$

$$\text{For Buen } bm \text{ er } d.(\text{Tang. Kraft}) = \frac{bqr \sin 2\beta''}{2(1 - \cos\alpha)} (\cos\phi - \cos\alpha)\, d.\phi$$

Dens Integral skal være 0, naar $\phi = \acute{\alpha}$, og have sin complette Verdie naar $\phi = \alpha$, derved faaes:

Sum af Tang. Kraft over bm =

$$= \frac{bqr \sin 2\beta''}{2(1 - \cos\alpha)} \Big((\sin\alpha - \sin\acute{\alpha}) - \cos\alpha\,(\alpha - \acute{\alpha})\Big)$$

Axel Frictionen er (efter 9.) lig en Tangential Kraft $\dfrac{\frac{r'}{r} Q}{n} = \dfrac{\frac{r'}{r}\sqrt{S^2 + f^2}}{n}$. Rotations Æqvilibret giver altsaa fölgende Bestemmelse:

$$\frac{b\,q\,r \sin 2\,\beta''}{2\,(1 - \cos\alpha)}\Big((\sin\alpha - \alpha\cos\alpha) - (\sin\acute{\alpha} - \acute{\alpha}\cos\alpha)\Big) + \frac{\frac{r'}{r}\sqrt{S^2 + f^2}}{n} =$$

$$= \frac{b\,q\,r \sin 2\,\beta'}{2\,(1 - \cos\alpha)}\Big(\sin\acute{\alpha} - \acute{\alpha}\cos\alpha\Big)$$

16. Ved Buen fb betegnes S og f med S', f'

\- - - bm - - - - - - S'', f'' men faaer da

$$d\,.\,S' = \frac{b\,q\,r \cos\beta'}{1 - \cos\alpha}(\cos\phi - \cos\alpha)\cos(\phi + \beta')\,d\,.\,\phi$$

naar for $\cos(\phi + \beta')$ settes dens Verdie $\cos\phi\cos\beta' - \sin\phi \sin\beta'$, Integreringen foretages og completeres, og ϕ derpaa settes $= \acute{\alpha}$, bekommes

$$S' = \frac{b\,q\,r \cos\acute{\beta}^2}{2\,(1 - \cos\alpha}\left\{\begin{array}{l}\acute{\alpha} - (2\cos\alpha - \cos\acute{\alpha})\sin\acute{\alpha} - \\ \qquad - \text{Tang.}\,\beta'\left[\sin\acute{\alpha}^2 - 2\cos\alpha\,(1 - \cos\acute{\alpha})\right]\end{array}\right\}$$

videre er $d\,.\,S'' = \dfrac{b\,q\,r \cos\beta''}{1 - \cos\alpha}\Big((\cos\phi - \cos\alpha)\cos(\phi - \beta'')\,d\,.\,\phi\Big)$

Integralen completeres ved at den skal være o naar $\phi = \acute{\alpha}$, man faaer da, ved derefter at sette $\phi = \alpha$,

$$S'' = \frac{b\,q\,r \cos\ddot{\beta}^2}{2\,(1 - \cos\alpha)}\left\{\begin{array}{l}(\alpha - \cos\alpha\sin\alpha) \\ - \Big(\acute{\alpha} - (2\cos\alpha - \cos\acute{\alpha})\sin\acute{\alpha}\Big) \\ + \text{Tang.}\,\ddot{\beta}\Big((1 - \cos\alpha)^2 - \big(\sin\acute{\alpha}^2 - 2\cos\alpha\,(1 - \cos\acute{\alpha})\big)\Big)\end{array}\right\}.$$

da nu $S = S' + S''$, bekommes

$$S = \frac{b\,q\,r}{2\,(1 - \cos\alpha)}\left\{\begin{array}{l}\cos\ddot{\beta}^2\,(\alpha - \cos\alpha\sin\alpha) \\ - (\cos\ddot{\beta}^2 - \cos\acute{\beta}^2)\Big(\acute{\alpha} - (2\cos\alpha - \cos\acute{\alpha})\sin\acute{\alpha}\Big) \\ + \sin\beta''\cos\beta''\,(1 - \cos\alpha)^2 - \\ \qquad - \dfrac{\sin 2\,\beta' + \sin 2\,\beta''}{2}\Big(\sin\acute{\alpha}^2 - 2\cos\alpha\,(1 - \cos\acute{\alpha})\Big)\end{array}\right\}.$$

17. $d.\int' = \frac{b\,q\,r\,\cos\beta'}{1-\cos\alpha}\left((\cos\phi - \cos\alpha)\sin(\phi+\beta')\,d.\phi\right)$

ϕ sat $=\acute{\alpha}$ efter Integringen giver:

$$\int' = \frac{b\,q\,r\,\cos\acute{\beta}^2}{2\,(1-\cos\alpha)}\left\{\begin{array}{l}\left(\sin\acute{\alpha}^2 - 2\cos\alpha\,(1-\cos\acute{\alpha})\right)\\ \qquad + \text{Tang.}\,\beta'\left(\acute{\alpha} - (2\cos\alpha - \cos\acute{\alpha})\sin\acute{\alpha}\right)\end{array}\right\}$$

videre er $d.\int'' = \frac{b\,q\,r\,\cos\beta''}{1-\cos\alpha}\left((\cos\phi - \cos\alpha)\sin(\phi - \ddot{\beta})\,d.\phi\right)$

dens integral skal være o naar $\phi = \acute{\alpha}$ og complet naar $\phi = \alpha$, derved bekommes:

$$\int'' = \frac{b\,q\,r\,\cos\ddot{\beta}^2}{2\,(1-\cos\alpha)}\cdot\left\{\begin{array}{l}(1-\cos\alpha)^2\\ -\left(\sin\acute{\alpha}^2 - 2\cos\alpha\,(1-\cos\acute{\alpha})\right)\\ -\text{Tang.}\,\beta''\left(\begin{array}{l}\alpha - \cos\alpha\sin\alpha\\ -\left(\acute{\alpha} - (2\cos\alpha - \cos\acute{\alpha})\sin\acute{\alpha}\right)\end{array}\right)\end{array}\right\}.$$

da nu $\int = \int' + \int''$, bekommes:

$$\int = \frac{b\,q\,r}{2\,(-\cos\alpha)}\cdot\left\{\begin{array}{l}\cos\ddot{\beta}^2\,(1-\cos\alpha)^2\\ -(\cos\ddot{\beta}^2 - \cos\acute{\beta}^2)\left(\sin\acute{\alpha}^2 - 2\cos\alpha\,(1-\cos\acute{\alpha})\right)\\ -\sin\beta''\cos\beta''\,(\alpha - \cos\alpha\sin\alpha)\\ +\frac{\sin 2\beta' + \sin 2\beta''}{2}\left(\acute{\alpha} - (2\cos\alpha - \cos\acute{\alpha})\sin\acute{\alpha}\right)\end{array}\right\}.$$

18. Lad til Udtrykkenes Forkortning antages;

$$\acute{\alpha} - (2\cos\alpha - \cos\acute{\alpha})\sin\acute{\alpha} = p$$

$$\sin\acute{\alpha}^2 - 2\cos\alpha\,(1-\cos\acute{\alpha}) = p'$$

p og p' afhænge da begge af $\acute{\alpha}$ saaledes, at de blive o naar den er o. bestemmes nu q ved Æqvationen $S = Q$, og den fundne Verdie indsettes i $\int$, samt de fornödne Reductioner foretages, da bekommes:

$$f=Q\cdot\left\{\frac{\cos\ddot{\beta}^2\,(1-\cos\alpha)^2-\frac{\sin 2\ddot{\beta}}{2}(\alpha-\cos\alpha\sin\alpha)+\frac{\sin 2\acute{\beta}+\sin 2\ddot{\beta}}{2}p-(\cos\ddot{\beta}^2-\cos\acute{\beta}^2)\,.p'}{\cos\ddot{\beta}^2\,(\alpha-\cos\alpha\sin\alpha)+\frac{\sin 2\beta''}{2}(1-\cos\alpha)^2-(\cos\ddot{\beta}^2-\cos\acute{\beta}^2)p-\frac{\sin 2\beta'+\sin 2\beta''}{2}.p'}\right\}.$$

eller, naar Tæller og Nævner divideres med

$$\cos\ddot{\beta}^2\,(\alpha-\cos\alpha\sin\alpha)$$

$$f=Q\cdot\left\{\frac{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{\alpha-\cos\alpha\sin\alpha}-\mathrm{Tag}\,\beta''+\frac{\sin 2\beta'+\sin 2\beta''}{2\cos\ddot{\beta}^2}\times\frac{p}{\alpha-\cos\alpha\sin\alpha}-\left(1-\left(\frac{\cos\beta'}{\cos\beta''}\right)^2\right).\frac{p'}{\alpha-\cos\alpha\sin\alpha}}{1+\mathrm{Tang}\,\beta''\times\frac{(1-\cos\alpha)^2}{\alpha-\cos\alpha\sin\alpha}-\left(1-\left(\frac{\cos\beta'}{\cos\beta''}\right)^2\right)\frac{p}{\alpha-\cos\alpha\sin\alpha}-\frac{\sin 2\beta'+\sin 2\beta'}{2\cos\ddot{\beta}^2}.\frac{p'}{\alpha-\cos\alpha\sin\alpha}}\right\}.$$

Da nu $Q\times\frac{(1-\cos\alpha)^2}{\alpha-\cos\alpha\sin\alpha}$ er $=f$ for det Tilfælde, at ingen Tangential-Kræfter have Sted (§. 6.), saa lad

$$\frac{(1-\cos\alpha)^2}{\alpha-\cos\alpha\sin\alpha}=G$$

$$\frac{(1-\cos\alpha)^2}{\sin\alpha-\alpha\,.\cos\alpha}=g$$ saa bliver endelig

$$f = G \cdot Q \times \left\{ \frac{1 - \frac{\text{Tang.}\,\beta''}{G} + \frac{\sin 2\beta' + \sin 2\beta''}{2\cos\beta''^2} \cdot \frac{p}{(1-\cos\alpha)^2} - \left(1 - \left(\frac{\cos\beta'}{\cos\beta''}\right)^2\right) \cdot \frac{p'}{(1-\cos\alpha)^2}}{1 + G\left\{\text{Tag}\,\beta'' - \left(1 - \left(\frac{\cos\beta'}{\cos\beta''}\right)^2\right) \cdot \frac{p}{(1-\cos\alpha)^2} - \frac{\sin 2\beta' + \sin 2\beta''}{2\cos\beta''^2} \cdot \frac{p'}{(1-\cos\alpha)^2}\right\}} \right\}$$

19. Den beqvemmeste Brug af denne Æqvation, tilligemed Æqvationerne i (§§ 15, 16, 17) afhænger fornemmelig af Buen fb eller $\acute{\alpha}$, kan altsaa ikke bestemmes förend forelöbige Observationer have viist, hvad Værdie denne faaer imod α under de Tilfælde, man eragtede at oplyse ved directe Forsög. Ved Störrelsernes ubestemte Værdier synes kun eet Tilfælde at udmærke sig *saavel* for dets lettere Overskuen, *som* for dets rimelige Stedhaven i nogle af Hiulenes virkelige Bevægelser. Det bestaaer i Antagelsen at $\beta'' = 0$, eller at ingen af *Grundens* modstaaende Kræfter virke til den anden Side af Normalerne, men alle til een Side af samme. Svinget maae da i hvert Öyeblik for sig skee enten om $\acute{\alpha}$ eller omkring et Punct neden for samme, og det synes at medföre, at Nedsynkningen i *Grunden* ikke kan være betydelig, heller ikke β have nogen mærkelig höy Værdie, naar Axel-Frictionen er, som sædvanligst, af maadelig Störrelse. — Den (i § 4) angivne Observation for Bestemmelsen af $\acute{\alpha}$ vil immer viise, om og naar dette Tilfælde har Sted.

antages derfore $\beta'' = 0$ bliver
$$\alpha' = \alpha$$
$$p = \alpha - \cos\alpha \sin\alpha$$
$$p' = (1 - \cos\alpha)^2$$
og

$$f = G\,Q \left\{ \frac{\cos\beta'^2 + \frac{\sin 2\beta'}{2G}}{\cos\beta'^2 - G \times \frac{\sin 2\beta'}{2}} \right\}^{\circ} = G\,Q \left\{ \frac{1 + \frac{\mathrm{Tang.}\,\beta'}{G}}{1 - G\,.\,\mathrm{Tang.}\,\beta'} \right\}^{\circ}$$

Ved æqvationen (§. 15.) findes videre:

$$\sin 2\beta' = \frac{(1 - \cos\alpha)\frac{r'}{nr}\left(S^2 + f^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{bqr}{2}\,.\,\left(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha\right)}$$

Naar $\frac{bqr}{2}$ bestemmes (fra §. 17.) i f og (fra §. 16, 17) findes

$$\left(S^2 + f^2\right)^{\frac{1}{2}} = f\left[1 + \left(\frac{S}{f}\right)^2\right] = \frac{f\sqrt{1 + G^2}}{\cos\beta'\,(G + \mathrm{Tang.}\,\beta')},$$ da bliver derved $\sin\beta' = \frac{r'}{nr} \times \frac{g}{2G}\sqrt{1 + G^2}$

Verdien af β' afhænger saaledes af de 2de Störrelser $\frac{r'}{nr}$ og $\frac{g}{2G} \times \sqrt{1 + G^2}$. $\frac{r'}{nr}$ er forhen (§. 9) fundet at være for 4 Fod höje Hiul neppe större end $\frac{1}{45} = 0{,}022$.

$$\frac{g}{2G}\sqrt{1 + G^2} = \frac{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}{2\,(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)}\left[1 + \frac{(1 - \cos\alpha)^4}{(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

maae kiendes ved Beregning, den findes

for $\alpha = 5^{\circ}$	1,00	kan derfore uden mærkelig Feil ansees $= 1$, og derved haves da:
- - 10°	1,00	
- - 15°	1,00	$\sin\beta' = \mathrm{Tang.}\,\beta' = \frac{r'}{nr}$
- - 20°	1,00	
- - 25°	0,99	

- - 30° - - -	0,99	Da sinus og Tangent for saa smaae Buer, som β' her bliver, kunne ansees lige.
- - 35° - - -	0,99	
- - 40° - - -	0,98	

Verdien af f bliver fölgelig:

$$f = G \cdot Q \times \left\{ \frac{\frac{1 + \left(\frac{r'}{n\,r}\right)}{G}}{1 - \frac{r'}{n\,r}\,G} \right\}.$$

Denne bekræfter, som let sees, Slutningerne i (§. 9.)

20. β' kan i foregaaende ikkuns blive $1\frac{1}{4}°$ i Fölge den angivne Værdie af $\frac{r'}{n\,r}$. Naar det erindres, at β' er for en Deel af α lig β selv, saa synes $1\frac{1}{4}°$ at antyde en mindre Værdie for β, end den rimelig i de jevnligst mödende Tilfælde virkelig har. Den seeneste fundne Værdie for f vil derfor muelig kuns siælden blive den giældende, og naar den almindeligere (fra § 18.) skal bruges, da er det immer en Uleilighed, at den indeholder 2de ubekiendte β' og β'', til hvis Bestemmelse haves, foruden f selv, kuns een Æquation. Hertil kommer, at β maatte ved andre Betragtninger igien bestemmes fra hiine. Disse Uleiligheder undgaaes ved de almindeligere Æqvationer, hvor β allene tages under Betragtning. Man har saaledes Aarsag til disses Udvikling og Fremsætning, endskiönt de falde vidtlöftigere og med meere sammenblandede Störrelser end hiine.

Lader man altsaa Modstands Directionernes Vinkler med Normalerne blive variable, som de virkelig ere, da findes let at

$$\text{Tang. } \beta' = \frac{\cos \phi - \cos \alpha}{\sin \phi}$$

$$\text{Tang. } \beta'' = \frac{\cos \alpha - \cos \phi}{\sin \phi}$$

Lad Verdierne af ϕ, for hvilke β' og β'' blive lig β benævnes ved ϕ' for Buen $\acute{\alpha}$

ved ϕ'' for Buen $(\alpha - \acute{\alpha})$

saa ere ϕ' og ϕ'' naturlig constanter, der bestemmes ved æquationen Tang. $\beta = \frac{\cos\phi' - \cos\acute{\alpha}}{\sin\phi'} = \frac{\cos\acute{\alpha} - \cos\phi''}{\sin\phi''}$ hvilke igien give $\cos\acute{\alpha}\cos\beta = \cos(\phi'+\beta) = \cos(\phi''-\beta)$ naar $\acute{\alpha}$ og β gives, ere altsaa ϕ' og ϕ'' bekiendte.

De mödende Iutegrationer have ingen Vanskelighed, naar man for $\sin 2\beta'$ og $\cos 2\beta'$ indsetter deres bekiendte Verdier $\frac{2\,\text{Tang.}\,\beta'}{1+\text{Tang.}\,\beta'^2}$, $\frac{1-\text{Tang.}\,\beta'^2}{1+\text{Tang.}\,\beta'^2}$ og i disse for Tang. β' dens nys ovenfor angivne Verdie. Setter man dernest til Udtrykkenes Forkortning

$$\frac{1+\cos\acute{\alpha}^2}{2\cos\acute{\alpha}} = \frac{\sec.\acute{\alpha}+\cos\acute{\alpha}}{2} = m$$

$$\frac{\sin\acute{\alpha}^2}{2\cos\acute{\alpha}} = \frac{\sec.\acute{\alpha}-\cos\acute{\alpha}}{2} = m'$$

da vil findes;

$$\left.\begin{matrix}\text{Sum af}\\ \text{Tangential}\\ \text{Kræfter}\\ \text{over } \acute{\alpha}\end{matrix}\right) = \frac{b\,q\,r}{2(1-\cos\alpha)}\left\{\begin{matrix}\sin 2\beta\,(\sin\phi' - \phi'\cos\alpha) - \left(\frac{\cos 2\phi' - \cos 2\acute{\alpha}}{4\cos\acute{\alpha}}\right)\\ + \left(\frac{\cos\alpha - m'}{\cos\acute{\alpha}}\right)(\cos\phi' - \cos\acute{\alpha})\\ + \left(\frac{\cos\alpha\,.\,\cos\acute{\alpha} - (\cos\alpha - m')m}{\cos\acute{\alpha}}\right)\log.\left(\frac{m-\cos\acute{\alpha}}{m-\cos\phi'}\right)\end{matrix}\right\}.$$

$$\left.\begin{matrix}\text{Sum af}\\ \text{Tangential}\\ \text{Kræfter}\\ \text{over } (\alpha-\acute{\alpha})\end{matrix}\right) = \frac{b\,q\,r}{2(1-\cos\alpha)}\left\{\begin{matrix}\sin 2\beta\left(\sin\alpha - \sin\phi''\right) - \cos\alpha\,(\alpha - \phi'')\Big)\\ + \frac{\cos 2\acute{\alpha} - \cos 2\phi''}{4\cos\acute{\alpha}} - \left(\frac{\cos\alpha - m'}{\cos\acute{\alpha}}\right)(\cos\acute{\alpha} - \cos\phi'')\\ - \left(\frac{\cos\alpha\cos\acute{\alpha} - (\cos\alpha - m')m}{\cos\acute{\alpha}}\right)\log.\left(\frac{m-\cos\phi''}{m-\cos\acute{\alpha}}\right)\end{matrix}\right\}.$$

Disse 2de give, i Steden for æqvationen (§. 15.), fölgende:

$$\frac{r'}{nr}\cdot\frac{(1-\cos\alpha)}{\left(\frac{bqr}{2}\right)}\cdot\sqrt{S^2+f^2}=\left\{\begin{array}{l}\sin 2\beta\left(\sin\phi'-\phi'\cos\alpha)+(\sin\phi''-\phi''\cos\alpha)-\right.\\ \qquad\qquad\left.-(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha)\right)\\ -\left(\frac{\cos 2\phi'-\cos 2\phi''}{4\cos\acute{\alpha}}\right)+\left(\frac{\cos\alpha-m'}{\cos\acute{\alpha}}\right)(\cos\phi'-\cos\phi'')\\ +\left(\frac{\cos\alpha\cos\acute{\alpha}-(\cos\alpha-m')m}{\cos\acute{\alpha}}\right)\log.\left(\frac{m-\cos\phi''}{m-\cos\phi'}\right)\end{array}\right\}.$$

Naar Værdierne for q og $\sqrt{S^2+f^2}$ fra de fölgende Æqvationer indsættes i denne, afgiver den Bestemmelsen for β. Dens vidtlöftighed vil i de fleeste Tilfælde noget formindskes ved, at Buen $(\alpha-\acute{\alpha})$ rimelig sielden tillader Modstands-Directions-Vinklerne med Normalerne at overstige β, og om de end for en liden Deel af det överste i Buen $(\alpha-\acute{\alpha})$ skulle giöre det, saa kan Feylen ved at antage, de ikke giöre det, kuns være meget ringe. Naar det er eller antages, da bliver $\phi''=\alpha$, og ovenstaaende Æqvation forvandler sig til:

$$\frac{r'}{nr}\cdot\frac{(1-\cos\alpha)}{\left(\frac{bqr}{2}\right)}\cdot\sqrt{S^2+f^2}=\left\{\begin{array}{l}\sin 2\beta\,(\sin\phi'-\phi'\cos\alpha)\\ -\left(\frac{\cos 2\phi'-\cos 2\alpha}{4\cos\acute{\alpha}}\right)+\left(\frac{\cos\alpha-m'}{\cos\acute{\alpha}}\right)(\cos\phi'-\cos\alpha)\\ +\left(\frac{\cos\alpha\cos\acute{\alpha}-(\cos\alpha-m')m}{\cos\acute{\alpha}}\right)\log.\left(\frac{m-\cos\alpha}{m-\cos\phi'}\right)\end{array}\right\}.$$

21. For Bestemmelsen af S findes:

$$S = \frac{b\,q\,r}{2(1-\cos\alpha)} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin 2\phi'' - \sin 2\phi'}{4} + (m - \cos\alpha)(\sin\phi'' - \sin\phi') \\ \quad + \left(m(m-\cos\alpha) - \frac{1}{2}\right)(\phi'' - \phi') \\ - m'(m-\cos\alpha)\left[\text{arc.}\sin\left(\frac{m'\sin\phi''}{m-\cos\phi''}\right) - \text{arc.}\sin\left(\frac{m'\sin\phi'}{m-\cos\phi'}\right)\right] \\ + \cos\beta^2 \left(\begin{array}{l} (\alpha - \cos\alpha\sin\alpha) + \left(\phi' - (2\cos\alpha - \cos\phi')\sin\phi'\right) \\ - \left(\phi'' - (2\cos\alpha - \cos\phi'')\sin\phi''\right) \end{array} \right) \\ + \frac{\sin 2\beta}{2} \left(\begin{array}{l} (1-\cos\alpha)^2 - \left(\sin\phi'^2 - 2\cos\alpha(1-\cos\phi')\right) \\ - \left(\sin\phi''^2 - 2\cos\alpha(1-\cos\phi'')\right) \end{array} \right) \end{array} \right\}.$$

denne bliver, naar $\phi'' = \alpha$, til;

$$S = \frac{b\,q\,r}{2(1-\cos\alpha)} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin 2\alpha - \sin 2\phi'}{4} + m - \cos\alpha)(\sin\alpha - \sin\phi') \\ + \left(m(m-\cos\alpha) - \frac{1}{2}\right)(\alpha - \phi') \\ - m'(m-\cos\alpha)\left[\text{arc.}\sin\left(\frac{m'\sin\alpha}{m-\cos\alpha}\right) - \text{arc.}\sin\left(\frac{m'\sin\phi'}{m-\cos\phi'}\right)\right] \\ + \cos\beta^2 \left(\phi' - (2\cos\alpha - \cos\phi')\sin\phi'\right) \\ - \frac{\sin 2\beta}{2}\left(\sin\phi'^2 - 2\cos\alpha(1 - \cos\phi')\right) \end{array} \right\}.$$

For Bestemmelsen af ſ findes dernest:

$$\text{ſ} = \frac{b\,q\,r}{2(1-\cos\alpha)} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{\cos 2\phi' - \cos 2\phi''}{4} - (m+\cos\alpha)\,(\cos\phi' - \cos\phi'') \\ + m'\,(m-\cos\alpha)\ \text{log.}\left(\frac{m-\cos\phi''}{m-\cos\phi'}\right) \\ + \cos\beta^2 \left\{ \begin{array}{l} (1-\cos\alpha)^2 + \left(\sin\phi'^2 - 2\cos\alpha\,(1-\cos\phi')\right) \\ - \left(\sin\phi''^2 - 2\cos\alpha\,(1-\cos\phi'')\right) \end{array} \right\} \\ - \frac{\sin 2\beta}{2} \left\{ \begin{array}{l} (\alpha - \cos\alpha\sin\alpha) - \left(\phi' - (2\cos\alpha - \cos\phi')\sin\phi'\right) \\ - \left(\phi'' - (2\cos\alpha - \cos\phi'')\sin\phi''\right) \end{array} \right\} \end{array} \right\}.$$

denne bliver, naar $\phi'' = \alpha$, til:

$$\text{ſ} = \frac{b\,q\,r}{2(1-\cos\alpha)} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{\cos 2\phi' - \cos 2\alpha}{4} - (m'+\cos\alpha)\,(\cos\phi' - \cos\alpha) \\ + m'\,(m-\cos\alpha)\ \text{log.}\left(\frac{m-\cos\alpha}{m-\cos\phi'}\right) \\ + \cos\beta^2 \left(\sin\phi'^2 - 2\cos\alpha\,(1-\cos\phi')\right) \\ + \frac{\sin 2\beta}{2} \left(\phi' - (2\cos\alpha - \cos\phi')\sin\phi'\right) \end{array} \right\}.$$

ÆEqvationerne for Tilfældet $\phi'' = \alpha$ gielder ogsaa naar $\alpha' = \alpha$, det er alleene m og m', der ved denne sidste Supposition forandre deres Værdie. — De forhen fundne ÆEqvationer, hvor β' og β'' ansaaes som constanter, have saaledes meget forud i Lethed og Simpelhed. Da S og ſ ere i Tilfælde af Forsög givne tilligemed Hiulenes Vægter, saa kan $\sqrt{S^2 + \text{ſ}^2}$ (i § 20.) angives ved Forsögets eegne Data, det er altsaa blot Verdien af q, der fra $Q = S$ maae findes og indsettes i Formulen (§ 20.), og vil da Æqvationen for Bestemmelsen af β haves. Dens Vidtlöftighed kan neppe videre formindskes, förend Indsettelsen af Störrelsernes Tal Verdier maatte dertil kunde give Anledning i særskildte Tilfælde.

22. Den nu afhandlede Theories nærmere Oplysning og Stadfæstelse ved Forsög beroer paa 2de særskilte Hoveddeele, hvilke det er saa meget meere fornödent at udsætte fra hinanden, som de have gandske forskiellige Hensigter, og ere forbundne med meget ulige Vanskeligheder.

Den förste og vigtigste, men tillige den letteste i Udförelsen, angaaer Bestemmelsen af $\acute{\alpha}$ eller Buen fb. Naar denne findes ved Hiulenes Bevægelser at have en angivelig og kiendelig Værdie, da afgives derved et Slags Beviis for, at Hoved Forestillingen om denne Sag er i de foregaaende Betragtninger rigtig. En maadelig belastet Karre, fremdraget ved een Hest med jevne Skridt — en jevn og saavidt mueligt steenfrie Vey eller *Grund* ere hertil de meest önskelige requisita. At den af Hiulet overgangne Veys Længde bliver nöyagtig maalt — at Hiulets Diameter eller dets Rands Omtræk haves ligeledes nöyagtig, og endelig at Hiulets Omveltningers Antal, ved at giennemgaae den ommældte Vey, blive rigtigen angivne eller talte, disse ere de fornödne Data fra Observationen. Da Karren kuns behöver at drages langsomt frem, saa opnaaes det sidste meest ligefrem ved simpel Telling, naar eet af Egene formedelst Farver udmærkes tydelig fra de andre. Men den til et sikkert Udslag fornödne Vey-Længde er ved bemældte Observation aldeles ikke vilkaarlig. Det vil let skiönnes, at $\acute{\alpha}$ maae blive saa meget mindre, som Hiulets Nedsynkning i

Grunden og Axel-Frictionen selv ere smaae til. Antager man nu, som fornödent til et sikkert Udslag, at det virkelig befundne Antal Omveltninger bör, i det mindste, være een mindre, end det for samme Vey-Længde og Hiul-Omtræk maatte være, naar Hiulet virkelig rullede, da kan α let være saa liden, at den fornödne Vey-Længde er for 4 Fod höye Hiul over een Miil. Dette oplyses end meere ved fölgende Tavle, hvori den nysmeldte Antagelse er lagt til Grund.

Verdie af α	det mindste Antal Omveltninger, som Observationen bör give	Den hertil fornödne mindste Vei-Længde, naar Hiulene ere 4 Fod höie.
2°	- - 1641 - - -	20634 Fod
4°	- - $409\frac{1}{2}$ - - -	5159 —
6°	- - 182 - - -	2300 —
8°	- - 102 - - -	1294 —
10°	- - 65 - - -	829 —
15°	- - $28\frac{1}{2}$ - - -	371 —
20°	- - 16 - - -	214 —

Naar Hiulet virkelig rullede, vilde Omveltningernes Antal i alle disse befindes een större end de i Tavlen angivne. α kan, som let sees, have en meget reél Værdie, skiönt den var mindre end 2°. I saadanne Tilfælde maae man da *enten* have en tilstrækkelig lang Vey, *eller* man maae nöyes med mindre Forskiel end en heel Omveltning. Naar det sidste vælges, maae Fremgangs-Maaden i det Heele være saa meget meere nöyagtig, som den havende Vey-Længde medförer, at Forskiellen bliver liden til. — At hendrage Opmerksomheden til denne Omstændighed har jeg anseet saa meget meere nödvendig, som det paa den eene Side er rimelig, at den kunde ellers forbigaaes, og det paa den anden Side er i mine Tanker usammenlignelig bedre, at der over en videnskabelig Qvestion ingen Observationer giöres, end at der ved Observationer fremkomme urigtige Udslag.

Den anden Hoved-Deel gaaer ud paa Bestemmelsen af β, eller Hiule-Randens og *Grundens* Frictions-Vinkel med hinanden. Denne medförer i Udövelsen usammenlignelig fleere Omstændigheder end hiin. Foruden at $\acute{\alpha}$ ogsaa her maae kiendes, er det end videre fornödent:

a) At Karrens heele Vægt og Hiulenes særskildte Vægt kiendes.

b) At Axel-Frictionen for sig gives.

c) At $\acute{\alpha}$, eller Nedsynkningsbuen under Bevægelsen, skaffes bekiendt. Dette kan, som let sees, ikke opnaaes, ved at maale Hiulenes Nedsynknings-Bue medens Karren staaer stille; thi denne er meget forskiellig fra hiin. Det vil heller ikke kunde rimelig opnaaes ved noget Slags Maal paa Hiul-Buerne selv under Bevægelsen, men dertil maae uden Tvivl vælges andre Midler.

d) At den fremdragende Kraft eller f gives. Det maae altsaa ikke være Dyr men Vægter, der vedligeholde Karrens Bevægelse.

For dem, det kan falde ind at foretage disse Forsög, er vist nok al videre Udvikling ufornöden. Jeg har derfore til Slutning kuns at bemærke fölgende:

Det er ikke rimeligt, at Frictions-Vinkelen β spiller nogen betydelig Rulle i Hiulenes Bevægelser, enten til at besvære eller lette dem. Hvor höye og breede Hiul bruges, finder man ofte, at Hiulspigerne have saa store og fremstaaende Hoveder, som om man derved attraaede, at forstörre β saavidt muligt. Fordeelen heraf, naar det ommeldte virkelig var Hensigten, er det vanskeligt at indsee. Om dette, og det övrige β vedkommende, vilde de sidstmeldte Forsög kunde give Oplysning. Men det fornemmeste Formaal ved disse maatte, ligesom ved de foregaaende Betragtninger β angaaende, være, at skaffe Mekaniken, som Videnskab betragtet, een uoplyst Qvestion mindre. Kuns fra dette Synspunct kan Sagen vinde den Interesse, som slige Forsögs hensigtsmæssige Anstilling udfordrer.